

最適化数学 A

(251S1517)

参考資料 [2]

キーワード

最適化問題, 目的関数, 制約条件, 数理計画, 線形計画, 標準形, 基底解, 実行可能基底解, 基底行列と基底変数

2 線形計画問題と標準形・基底解

2.1 最適化問題 (数理計画問題)

一般に, ある条件の下で関数を最小化する問題や最大化する問題を**最適化問題** (optimization problem), または, **数理計画問題** (mathematical programming problem) という。通常は, (英語の命令文で) 「最小化せよ」は, “Minimize” と書くが, 短縮して “Min” と書いたりもする。また, 「最大化せよ」は, “Maximize” と書くが, 元の実数値関数を (-1) 倍することで, 「最小化せよ」に書き直すことができるので, **最小化問題**だけを考えることで十分である。さらに, いくつかの条件を満足した上で最小化問題を考える時には, 「○○の条件の下で」あるいは「○○という制約の下で」を意味する “subject to” を最小化する関数の直後に書くが, 短縮して “s.t.” とも表す¹。さらに, 問題に名前を付けて, 先頭に (MP) や (P) 等を付ける。

$$\begin{array}{|l} \text{(MP)} \quad \text{Minimize} \quad f(x) \\ \text{subject to} \quad x \in S. \end{array} \quad \text{略して} \quad \begin{array}{|l} \text{(P)} \quad \text{Min} \quad f(x) \\ \text{s.t.} \quad x \in S. \end{array}$$

ここで, f は x を変数とする実数値関数で**目的関数**と呼ばれ, その変数 x の定義域は色々と考えることができる。例えば, 実数値多変数関数を考える時には, その変数の数が n のとき, 定義域は $\mathbb{R}^n$ とすることが多い。この場合は, “ n 変数実数値関数” $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を記号で $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ と表す。また, S は**制約集合** (constraint set) あるいは**実行可能領域** (feasible region / feasible domain) といい, f の定義域の部分集合とすることが多い。また, $x \in S$ を**制約条件** (constraint) という。さらに, S の要素を**実行可能解** (feasible solution) といい, それらの中で (目的関数 f の値を最小にする) 最適なもの**最適解** (optimal solution) という。他の専門書では, これらの用語を使って, (MP) を次のように表しているものもある。

$$\begin{array}{|l} \text{目的関数: } f(x) \text{ を最小化} \\ \text{制約条件: } x \in S. \end{array} \quad \text{や} \quad \begin{array}{|l} \text{目的関数: } f(x) \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件: } x \in S. \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|l} \text{最小化} \quad f(x) \\ \text{条件} \quad x \in S. \end{array}$$

最適解と最適値の定義

最適化問題 $\text{(P)} \text{Min } f(x) \text{ s.t. } x \in S$ に対して, x^* が (P) の**最適解** (optimal solution) であるとは次の2つの条件をみたすときである。

$$\textcircled{1} x^* \in S \quad \text{かつ} \quad \textcircled{2} f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S.$$

また, x^* が (P) の**最適解**であるとき, $f(x^*)$ を (P) の**最適値** (optimal value) という。

次に, 制約集合 S がいくつかの関数の不等式や等式で表されている時 (これらの関数を**制約関数**と呼ぶ), つまり, 各制約関数 $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ と $h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ によって,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} g_1(x) \leq 0, \dots, g_\ell(x) \leq 0 \quad (\text{不等式制約という}) \\ h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0 \quad (\text{等式制約という}) \end{array} \right\}$$

¹数学の記号で, “such that” を短縮して, “s.t.” と表すこともあるので混同しないこと。

と表されているならば、問題 (MP) は**非線形計画問題** (Nonlinear Programming Problem) と呼ばれ、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{(MP)} \quad & \text{Min} \quad f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t.} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, \ell) \\ & \quad \quad h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

さらに、目的関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が線形関数ですべての制約関数が 1 次関数である場合、問題 (MP) は**線形計画問題** (Linear Programming Problem) と呼ばれ、英語の頭文字をとって、**LP 問題**ともいう。具体的に、 n 変数の場合を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots + a_{jn} x_n - b_j \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

となり、さらに、 $\ell = n$ で、不等式制約 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, \ell)$ の関数が

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1, \quad g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_2, \quad \dots, \quad g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_n$$

となる場合は、不等式制約は $x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ で表されるので、「変数が**非負である**」、あるいは、「**非負条件 (nonnegative condtion)**がある」といい、数理計画問題 (MP) は、次のような形になる。

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{Min} \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ & \text{s.t.} \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & \quad \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \quad \quad \dots \dots \dots \\ & \quad \quad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ & \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

なお、不等式は変数を追加することにより等式に変形できるし、逆に等式は 2 本の不等式に分けて表すこともできる。また、変数に非負条件 ($x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$) をつけた形にも変形できる。ここでは、問題 (LP) の形を線形計画問題の**標準形 (standard form)**と呼ぶことにする²。なお、1.3 節で考えたように、(LP) は次のような簡約な表現で表すことが可能である。

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{Min} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ただし、

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

なお、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (ベクトル $\mathbf{x}$ が非負) の意味については次のように考える。 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \geq \mathbf{y} &\iff x_i \geq y_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ \mathbf{x} > \mathbf{y} &\iff x_i > y_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

もちろん、実数の大小関係と同じように、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ を $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ 、 $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ を $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ と表す。また、 $\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトルの内積に対して、次が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} &\implies \mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0. \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{y} \leq \mathbf{0} &\implies \mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq 0. \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{y} > \mathbf{0} &\implies \mathbf{x}^T \mathbf{y} > 0. \end{aligned}$$

²他の専門書によっては、不等式制約を持つ線形計画問題を標準形としているものもある。

2.2 線形計画問題における用語

線形計画問題の制約条件の連立 1 次方程式 $Ax = b$ において、行基本変形によって、 $m \times n$ 行列 A をガウス行列に変形した時の初 1 の個数を A の**階数 (ランク)** といって、 $\text{rank} A$ と表す。今後、 $\text{rank} A = m$ かつ $m < n$ と仮定する。このとき、行列 A の列ベクトルの (n 本ある) 中から 1 次独立なものを m 本選び出せる事に注意する。

● 標準形

線形計画問題の制約条件が連立 1 次方程式の解で非負条件 ($x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$) がついている問題を**標準形**と呼ぶ。制約条件に不等式を含む場合は、非負変数 (**スラック変数**という) を追加して $Ax = b$ と $x \geq 0$ とすることができ、また、非負条件がない変数があった場合には、新たに 2 つの非負変数の差として表せば標準形に直すことが可能である。

● 実行可能領域, 実行可能解

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ を**実行可能領域 (feasible domain)** または**実行可能集合 (feasible set)** といい、その要素 $x \in S$ を**実行可能解 (feasible solution)** という。

● 基底変数, 非基底変数, 基底行列, 非基底行列

連立 1 次方程式 $Ax = b$ の係数行列 A について、その (n 本ある) 列ベクトルの中から m 本の 1 次独立なものを一組選んだ時、それらを並べて作る ($m \times m$ の) 行列を**基底行列 (basic matrix)** というので B と表すことにし、それに対応する変数を**基底変数 (basic variable)** と呼ぼう。他方、残りの変数を**非基底変数 (nonbasic variable)** と呼ぶことにし、それらに対応する列ベクトルを並べた行列を**非基底行列 (nonbasic matrix)** といって N で表そう。基底変数からなるベクトルを x_B 、非基底変数からなるベクトルを x_N とおけば、変数の順序を適当に並びかえると係数行列 A と変数ベクトル x は次のように分割表示することで、連立 1 次方程式 $Ax = b$ も $Bx_B + Nx_N = b$ のように表せる。

$$A = (B \quad N), \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

● 基底解, 実行可能基底解

$\text{rank} A = m$ かつ $m < n$ と仮定しているので、基底行列 B は正則で逆行列 B^{-1} を持ち、 $b \in \mathbb{R}^m$ は基底行列 B の列ベクトルの 1 次結合で一意に表すことができる。つまり、非基底変数をすべて零 ($x_N = 0$) とすることで、 $x_B = B^{-1}b$ と一意に決定される。こうして定まる

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

を連立 1 次方程式 $Ax = b$ の**基底解 (basic solution)** という。もし、その基底解の変数が非負である ($x \geq 0$ をみたら) ならば、**実行可能基底解 (basic feasible solution)** という。

● 最適解, 最適値

線形計画問題 (LP) の実行可能基底解は幾何学的には実行可能領域の頂点に対応するが、それは 1 点とは限らない。これは、 $m < n$ と仮定していることから、1 次独立な列ベクトルの選び方がたくさんあることを意味している。これらの実行可能基底解の中で目的関数 f を最小にするものがあれば、それを**最適解 (optimal solution)** または**最小解 (minimizer)** といい、その関数の値を**最適値 (optimal value)** という。

定理 2.1 (線形計画問題の実行可能集合と最適解の関係 1). 線形計画問題 (LP) において、その実行可能集合 S が $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 (i = 1, \dots, k) \right\}$ と表されている場合、(LP) の最適値は $c^T e_{i_0} := \min_{i=1, \dots, k} c^T e_i$ (端点での目的関数の最小値) に一致する。

2.3 基底行列・基底変数および非基底行列・非基底変数を使った具体的な分解

具体的な場合を考えよう。行列 A を 2×4 型で階数 2 とし、その列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ とすると、これらの中から 1 次独立な 2 個のベクトルを選ぶことができる。それらによって、 $\mathbb{R}^2$ のどのベクトルもそれらの 1 次結合で表現できるので、右辺の $\mathbf{b}$ も $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の中の 2 個を上手く選べば表現することが可能となる。

具体的な連立 1 次方程式の例で考えてみよう。まず最初に、連立 1 次不等式の場合は、次のようにスラック変数 x_3, x_4 を使って、同値な連立 1 次方程式（等式）に変形できる。

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 1x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \\ \boxed{x_3} \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & 2 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \\ x_3 \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & \boxed{2} & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{2} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \\ x_3 \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{x_3} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_3} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上記の連立 1 次方程式の中で行列の列ベクトルを四角で囲んだところが基底行列を表し、変数を四角で囲んだところが基底変数を表している。残りのところが、それぞれ、非基底行列と非基底変数を表している。この例では、4 つある列ベクトルの内、どの 2 つを選んでもうまくいくが、そうならない場合もある。つまり、6 通りあるとは限らない。今回の 6 通りの場合につ

いて、それぞれの非基底変数の値を 0 とすると連立 1 次方程式が解けて基底変数の値が以下の
ようにそれぞれ求まる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{0} \\ \boxed{2} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_3} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_3} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{x_3} \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

しかし、(2.1) 式における $(x_1$ と x_2 の) 連立 1 次不等式、あるいは $(x_1, x_2, x_3, x_4$ の) 連立
1 次方程式には、それぞれの変数が 0 以上 (非負条件) という条件がついていたので、上の 6 通
りの内、2 通りは解にはならない。上記の問題の実行可能解は次の 4 通りとなる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

通常の線形計画問題では、変数 $\mathbf{x}$ に非負条件 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が制約として与えられているので、簡単
にその条件を満足するような 1 次独立な m 個のベクトルを選び出すことは方程式の個数や変数
の数によっては困難となることもある。

ただし, 1.3 節で考えたように, $Ax = b$ を行列 A の列ベクトルの非負 1 次結合表現 (各係数が 0 以上, 即ち, 非負条件をみたま場合) とみることにより, すべての組合せを列挙することは原理的に可能である。例えば, (2.1) 式における連立 1 次方程式の 4 つの列ベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を $\mathbb{R}^2$ で図示すると右図のようになり, ベクトル $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ をはさむような位置にある 2 つのベクトルの組合せは 4 通りあり, (2.2) 式の 4 つの解それぞれに対応している。

また, これらの実行可能基底解は, 1.3 節で考えた超平面の共通部分 (アフィン集合) とみる方法でも確認できる。例えば, (2.1) における非負条件付きの連立 1 次不等式を x_1x_2 平面における 4 つの半空間の共通部分と考えると右の図の四角形の部分となることが分かる。また, スラック変数 x_3, x_4 を使った非負条件付きの連立 1 次方程式を次の 2 つの超平面と非負象限 $\mathbb{R}_+^4 := \{x \mid x \geq 0\}$ の共通部分と考えることもできる。

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= 12 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 8 \end{aligned}$$

これらの超平面は, 4 次元ユークリッド空間の集合で容易に図には表せないので, 4 次元空間の様子を 2 次元空間で解釈しないといけない。例えば, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$ は 4 つの超平面 $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 12, 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 8, x_3 = 0, x_4 = 0$ の交点となっている。

演習 2.1. 次の線形計画問題について, 各問いに答えよ。

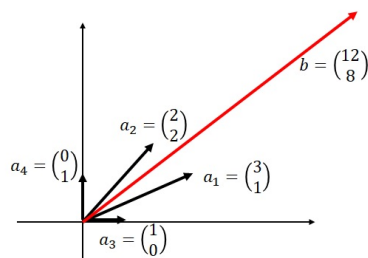
$$\begin{aligned} (\text{LP}) \quad & \text{Min} \quad 3x_1 - x_2 \\ & \text{s.t.} \quad -2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & \quad \quad x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (1) いくつかスラック変数を挿入して, 問題 (LP) を標準形 (LP)' に直せ。
- (2) (1) の標準形問題の実行可能基底解をすべて求めよ。また, それらの場合の目的関数の値を求めて比較せよ。
- (3) 内積の考え方を利用して, 問題 (LP) の実行可能領域を図示せよ。
- (4) 定理 2.1 を利用して, 問題 (LP) の最適解と最適値を図から求めよ。

列ベクトルの一次結合とみる方法

(x_1, x_2, x_3, x_4) の中で右辺を表現するのに, 最低限必要な変数を **基底変数** と呼び, 不要な変数を **非基底変数** と呼ぶ。

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$



超平面の共通部分とみる方法

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$ 4 つの変数の内, 2 つをゼロとすること (非基底変数) で, 他の 2 つの変数が基底変数となり, 基底解が得られる。

